LC 回路網におけるグラフ論的超対称性について

中田陽介

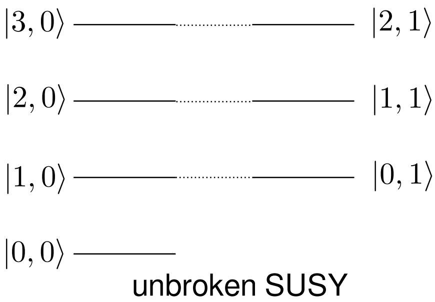
信大環エネ研

Apr. 29, 2016

目次

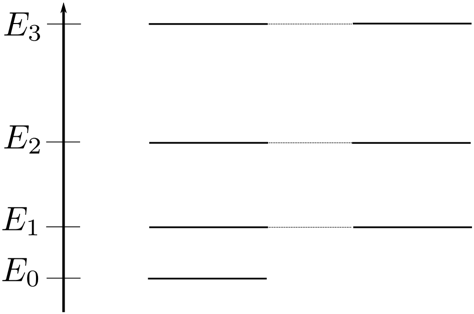
超対称性とは?

- ボソンとフェルミオンの入れ替えに関する対称性
  - ボソンとフェルミオン 1 つあたりのエネルギーが一致
    → 各準位が 2 重縮退する (基底状態は違う可能性あり)



- $|m,n\rangle$: ボソン m 個, フェルミオン n 個

超対称量子力学



エネルギースペクトルが二重縮退する量子系を研究
(最低準位を除いて)

坂本 眞人 「量子力学から超対称性へ」, サイエンス社 (2012).

超対称量子力学入門

SUSY があらわれるには? (代数)

1. H, Q, $(-1)^F$: エルミート演算子
   - H: ハミルトニアン, Q: 超電荷, $(-1)^F$: 判定のオペレータ
2. $H = Q^2$
3. 反交換性: $\{Q, (-1)^F\} = Q(-1)^F + (-1)^F Q = 0$
4. $\left((-1)^F\right)^2 = 1$

同時固有ケット

性質 1

- $(-1)^F$ の固有値は ± 1
- $[H, (-1)^F] = 0 \rightarrow H, (-1)^F$ は同時対角化可能

証明:

- $((-1)^F)^2 = 1 \rightarrow (-1)^F$ の固有値は ± 1
- $[H, (-1)^F] = Q^2(-1)^F - (-1)^F Q^2 = 0$

$\square$

固有ケット: $|E, \lambda\rangle$

- $H\,|E, \lambda\rangle = E\,|E, \lambda\rangle$
- $(-1)^F\,|E, \lambda\rangle = \lambda\,|E, \lambda\rangle$

固有エネルギーの非負性

性質 2

$E \geq 0$

証明:

$$E = \langle E, \lambda | H | E, \lambda \rangle = \| Q \, | E, \lambda \rangle \|^2 \geq 0$$

□

エネルギーには下限がある

Q の働き

性質 3

$Q\,|E,\lambda\rangle = \sqrt{E}\,|E,-\lambda\rangle$

証明:

- $H(Q\,|E,\lambda\rangle\,) = QH\,|E,\lambda\rangle = E(Q\,|E,\lambda\rangle\,)$
- $(-1)^F(Q\,|E,\lambda\rangle\,) = -Q(-1)^F\,|E,\lambda\rangle = -\lambda(Q\,|E,\lambda\rangle\,)$

$\rightarrow Q\,|E,\lambda\rangle \propto |E,-\lambda\rangle$.

- $\|Q\,|E,\lambda\rangle\,\|^2 = \langle E,\lambda|H|E,\lambda\rangle = E$

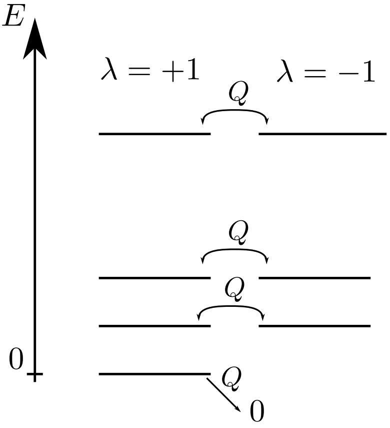
$\rightarrow Q\,|E,\lambda\rangle = \sqrt{E}\,|E,-\lambda\rangle$. $\square$

Q をかける $\rightarrow$ パートナーに移る

小まとめ

- $E \geq 0$
- $Q\,|E, \lambda\rangle = \sqrt{E}\,|E, -\lambda\rangle$

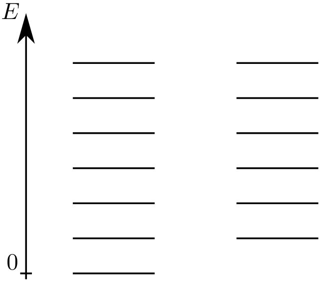
あれば $Q\,|0, \lambda\rangle = 0$ (Exact SUSY)



2つの1次元量子系

1次元量子系 $\times 2 \rightarrow$ SUSYなエネルギー準位も実現可能

例: 2つの調和振動子



$H = \hbar\omega a^\dagger a$ $\qquad$ $H = \hbar\omega(a^\dagger a + 1)$

Witten 模型

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{bmatrix},\ (-1)^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

は以下の条件を満たす

- $H, Q, (-1)^F$: エルミート演算子
- $H = Q^2$
- 反交換: $\{Q, (-1)^F\} = Q(-1)^F + (-1)^F Q = 0$
- $\left((-1)^F\right)^2 = 1$

→ 固有状態はペアを組む

1 次元問題のペア

$$A = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}W'(x)\right)$$

$$A^{\dagger} = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \mathrm{i}W'(x)\right)$$

W: 超ポテンシャル

$\longrightarrow$

$$H = \begin{bmatrix} H_+ & 0 \\ 0 & H_- \end{bmatrix}$$

$$H_+ = A^{\dagger}A = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2m}(W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x) = p^2 + V_+(x)$$

$$H_- = AA^{\dagger} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2m}(W'(x))^2 + \frac{\hbar}{2m}W''(x) = p^2 + V_-(x)$$

2 つのポテンシャル問題がペアを組む

Q の働き

$$(-1)^F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow |E,+\rangle = \begin{bmatrix} \psi_{E,+} \\ 0 \end{bmatrix}, |E,-\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \psi_{E,-} \end{bmatrix}$$

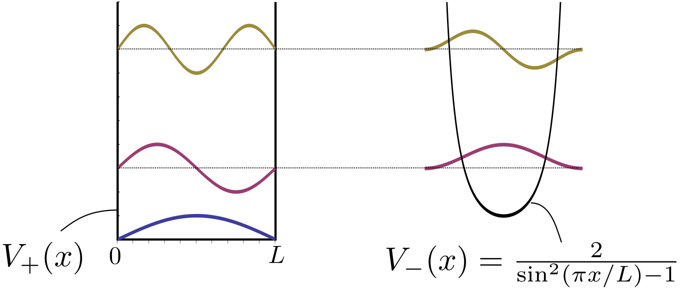
$Q = \begin{bmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{bmatrix}$ は以下のように作用:

- $A\psi_{E,+} = \sqrt{E}\psi_{E,-}$
- $A^\dagger\psi_{E,-} = \sqrt{E}\psi_{E,+}$

$A, A^\dagger$ によって固有状態が入れ替わる

1 次元問題のペア

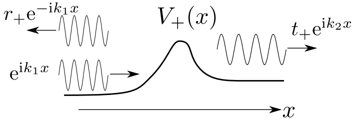
1. $H_+ = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{2m}(W'(x))^2 - \frac{\hbar}{2m}W''(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V_+(x)$
   $\rightarrow W$ を求める
2. H_- に代入 $V_-(x)$ が定まる



一見無関係なポテンシャル問題が関連付く
(厳密解が求まる)

散乱問題のペア

$$\psi_{E,+} \sim \begin{cases} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x} + r_+ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x} & (x \to -\infty) \\ t_+ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x} & (x \to \infty) \end{cases}$$



$A = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}W'(x)\right)$ を作用させると

$$\psi_{E,-} \propto \begin{cases} (\hbar k_1 - \mathrm{i}W'(-\infty))\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_1 x} + r_+(- \hbar k_1 - \mathrm{i}W'(-\infty))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_1 x} & (x \to -\infty) \\ t_+(\hbar k_2 - \mathrm{i}W'(\infty))\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_2 x} & (x \to \infty) \end{cases}$$

$$r_- = \frac{-\hbar k_1 - \mathrm{i}W'(-\infty)}{\hbar k_1 - \mathrm{i}W'(-\infty)} r_+$$

$$t_- = \frac{\hbar k_2 - \mathrm{i}W'(\infty)}{\hbar k_1 - \mathrm{i}W'(-\infty)} t_+$$

$k_1 = k_2$, $W'(\infty) = \pm W'(-\infty)$: 実 → $|r_-|^2 = |r_+|^2$, $|t_-|^2 = |t_+|^2$

phase がばれない方法も考えられている: M.-A. Miri *et al.*, Optica **1**, 89 (2014).

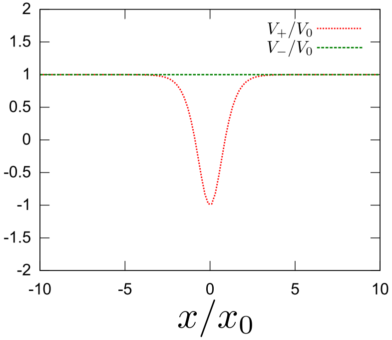
無反射ポテンシャル

$W'(x) = \frac{\hbar}{x_0} \tanh(x/x_0)$

$$V_+(x)/V_0 = 1 - \frac{2}{\cosh^2(x/x_0)}$$

$$V_-(x)/V_0 = 1$$

$V_0 := \frac{\hbar^2}{2m{x_0}^2}$



最近の展開

- 無反射物質波導波路:
  A. Del Campo *et al.*, Sci. Rep. **4**, 5274 (2014).
- ランダム系のバンドギャップ:
  S. Yu *et al.*, Nat. Commun. **6**, 8269 (2015).

最近の電磁系への展開

光ファイバの伝搬問題

波動方程式: $\left(-\frac{1}{(c/n)^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\nabla^2\right)\Psi=0$

$$\Psi=\tilde{\Psi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\rightarrow \text{Helmholtz 方程式: } (\nabla^2+k^2)\tilde{\Psi}=0$$

n: 屈折率, $k=nk_0$, 真空中の波数: $k_0=\frac{\omega}{c}$

仮定:

1. $n=n(x,y)$
2. $\tilde{\Psi}(x,y,z)=\tilde{\psi}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_z z}$

$$\left(-{\nabla_\perp}^2-n(x,y)^2{k_0}^2\right)\tilde{\psi}={k_z}^2\tilde{\psi}$$

$${\nabla_\perp}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

量子系のポテンシャル $\leftrightarrow$ 屈折率

光ファイバの伝搬定数を決める式:

$$\left(-{\nabla_\perp}^2 - n(x,y)^2 {k_0}^2\right)\tilde{\psi} = {k_z}^2\tilde{\psi}$$

量子力学の固有値問題:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}{\nabla_\perp}^2 + V(x,y)\right)\psi = E\psi$$

アナロジ: $-n^2 \leftrightarrow V$, ${k_z}^2 \leftrightarrow E$

離散バージョン

波動方程式 → タイトバインディングモデル $H\boldsymbol{A} = E\boldsymbol{A}$
$H_{m,n} = (\delta_{m-1,n} + \delta_{m+1,n})C_n + \delta_{m,n}\beta_n$
C_n: ホッピング, β_n: 共振器の離調
Cholesky 法で $H = LL^\dagger \to H_{\mathrm{SUSY}} = L^\dagger L$

最近の展開

- モードフィルタの提案:
  M.-A. Mili *et al.*, Phys. Rev. Lett. **110**, 233902 (2013).
- モードコンバータの実験:
  M. Heinrich *et al.*, Nat. Commun. **5**, 3698 (2014).
- SUSY パートナーの散乱特性の観測:
  M. Heinrich *et al.*, Opt. Lett. **39**, 6130 (2014).
- 無反射ポテンシャルの実現:
  A. Szameit *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 193903 (2011).
- 無反射交差の提案:
  S. Longhi, Opt. Lett. **40**, 463 (2015).

電気回路にあらわれるSUSY

本研究の目的

先行研究では誘電体が対象
→ 本研究: 金属構造で超対称性 (SUSY) が現れる例を構成

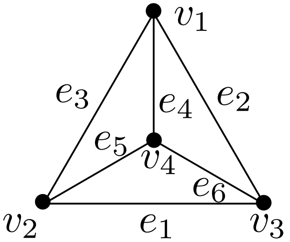
- メタマテリアル・プラズモニクスへの展開可能性

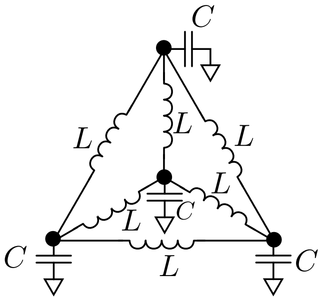
方法

- 電気回路で例を構成
- 高周波領域に適用
  - マクスウェル理論のスケール不変性より

単純 m-正則グラフ G 上の LC 回路網

- 単純グラフ: 多重辺やループがない
- m-正則: 各頂点に m 個の辺が接続

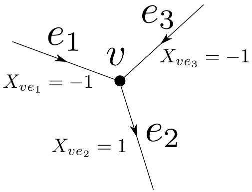




- G 上の LC 回路網:
  辺上に同一コイル, グランドと頂点間に同一コンデンサ

電荷保存則

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\mathsf{X}\boldsymbol{J}$$



電荷: $\boldsymbol{q} = [q_v]^{\mathrm{T}}$, 電流: $\boldsymbol{J} = [J_e]^{\mathrm{T}}$, 接続行列: $\mathsf{X} = [X_{ve}]$

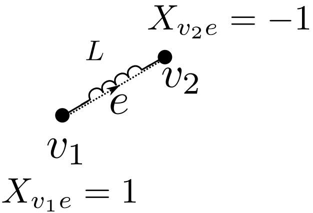
$$X_{ve} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v \text{ から辺 } e \text{ がでている}) \\ -1 & (\text{頂点 } v \text{ に辺 } e \text{ が入っている}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

コイルとコンデンサの応答

コイル:

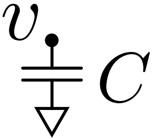
$$L\dot{\boldsymbol{J}} = \mathsf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}$$

静電ポテンシャル: $\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_v]^{\mathrm{T}}$



コンデンサ:

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{C}\boldsymbol{q}$$



単純 m-正則グラフ上の LC 回路網の共鳴

- $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, 角周波数 ω

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = -{\omega_0}^2 \mathsf{L} \boldsymbol{q}$$

$\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{q}} \exp(-\mathrm{i}\omega t) + \text{c.c.} \rightarrow$

$$\mathsf{L}\tilde{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{q}}$$

- グラフラプラシアン: $\mathsf{L} = \mathsf{X}\mathsf{X}^{\mathrm{T}}$

グラフラプラシアンの別の表し方

(向きのない) 接続行列: $\bar{\mathsf{X}} = [\bar{X}_{ve}]$

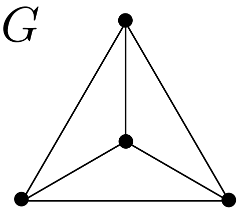
$$\bar{X}_{ve} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v \text{ と辺 } e \text{ が繋がっている}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

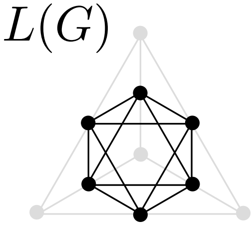
$$\mathsf{L} = -\bar{\mathsf{X}}\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}} + 2m\mathsf{I}$$

(m: 頂点の次数)

ラ イ ン グ ラ フ $L(G)$

1. 元のグラフ G の辺を $L(G)$ の頂点とみなす
2. G の辺 e_1, e_2 が共通の頂点を持つ → 対応する $L(G)$ の 2 頂点を繋ぐ



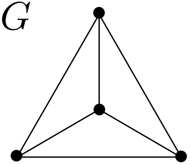


ラ イ ン グ ラ フのグ ラ フ ラ プ ラ シ ア ン:

$$\mathsf{L}_{\mathrm{L}} = -\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathsf{X}} + 2m\mathsf{I}_{\mathrm{L}}$$

グラフとライングラフ上のLC回路のスペクトル

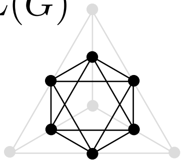
G



$$\mathsf{L}\tilde{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{q}}$$

$$\mathsf{L} = -\boxed{\bar{\mathsf{X}}\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}}} + 2m\mathsf{I}$$

$L(G)$



$$\mathsf{L}_{\mathrm{L}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{L}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{L}}$$

$$\mathsf{L}_{\mathrm{L}} = -\boxed{\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathsf{X}}} + 2m\mathsf{I}_{\mathrm{L}}$$

共鳴スペクトルが一致しなければならない (最高準位は除いて)

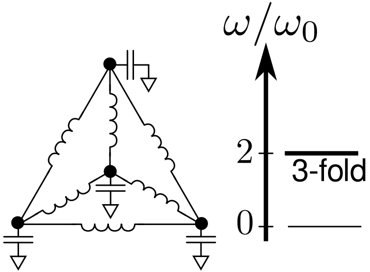
微分形式的解釈: Dirac 分解

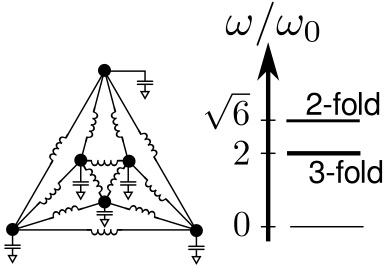
$$\Delta = \mathrm{d}\mathrm{d}^\dagger + \mathrm{d}^\dagger\mathrm{d} = (\mathrm{d} + \mathrm{d}^\dagger)^2$$

$\mathrm{d}^\dagger = (-1)^{n(p-1)+a-1} * \mathrm{d} *$: 余微分,
n: 空間次元, p: 微分形式の次元, a: 計量の符号数

M. Requardt, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. **02**, 585 (2005).

具体例: 有限グラフ

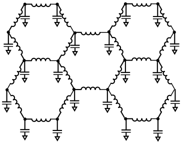


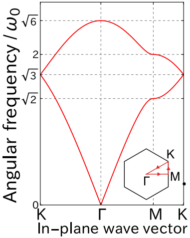


スペクトルが一致 (最高準位を除いて)

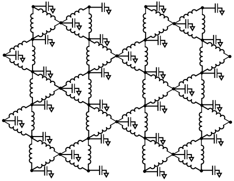
具体例: 6 角格子とカゴメ格子

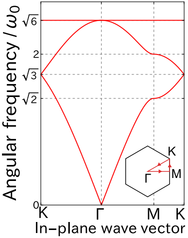
六角格子





カゴメ格子

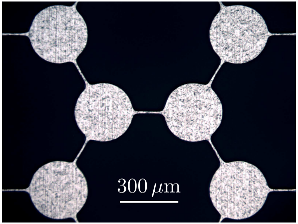




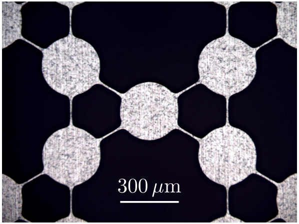
スペクトルが一致
分散も一致 (フラットバンドを除いて)

金属 6 角格子・カゴメ格子

6角格子



金属カゴメ格子



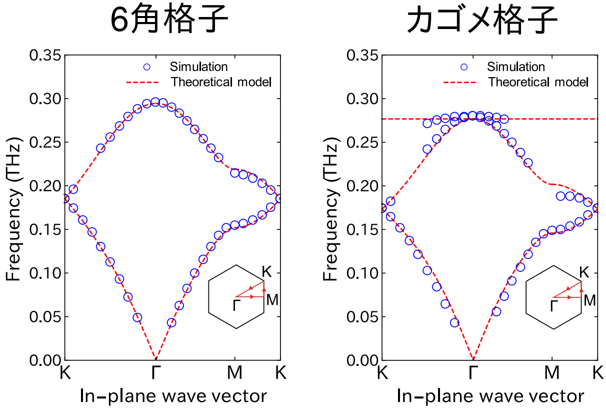
(SUS304 製, 厚み: $30\,\mu$m)

回路モデルで説明可

Y. Nakata *et al.*, Phys. Rev. B **85**, 205128 (2012).

S. Kajiwara *et al.*, Phys. Rev. B **93**, 075126 (2016).

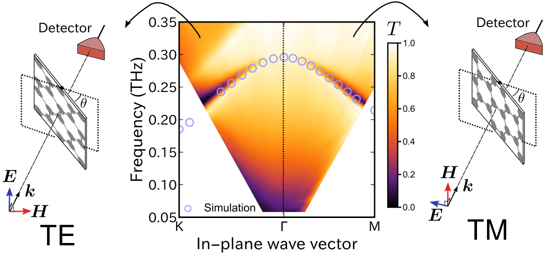
シミュレーションによる比較



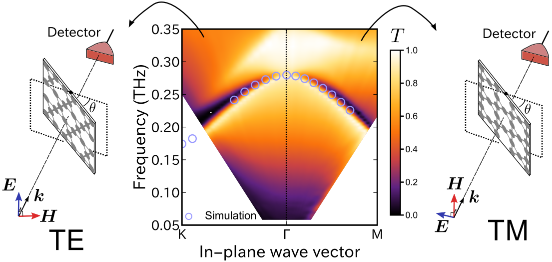
(P = C^{-1}(I + ηA), A: 隣接行列でフィット)
バンドの対応が示された

第２バンドの対応をテラヘルツ時間領域分光法で観測

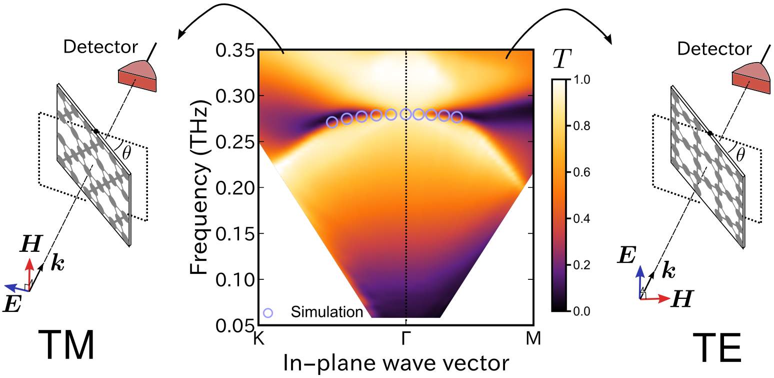
六角



カゴメ格子



カゴメ格子のフラットバンド



結論

1. 前半:
   - 超対称量子力学のレビュー
   - 光学応用で実験されていないものはたくさんある
   - アイディア次第で研究が作れる!
2. 後半
   - グラフとライングラフ上の LC 回路の共鳴スペクトルが一致 (最高バンドを除いて)
     - 超対称性の代数構造の帰結
   - 金属六角格子とカゴメ格子のスペクトルが対応することを観測
     - 金属系ではじめて超対称性関係を実験的に検証

Y. N. *et al.*, Phys. Rev. A **93**, 043853 (2016).