極性ベクトルと軸性ベクトル

中田　陽介

2015 年 1 月 5 日

1　はじめに

電磁気学や力学において, よく右ねじに進む方向に, という用語があらわれる．たとえば, $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ のようなベクトル積や, 電流に対し, 右ねじを進む方向に磁場があらわるアンペールの法則などがあげられる．しかし, 力学や電磁気学には右も左もないはずである．我々は中等教育の時代から右ねじの法則を刷り込まれすぎているため, どうしてこうした約束事がまかり通っているのか振り返って考えてみることは少ない．こうした事情は, 大学で軸性ベクトルと呼ばれる種類のベクトルを導入することにより解決されるのであるが, その事実を正しく理解している人は多くないようである[*1]．本論考では, 軸性ベクトルを自然に導入する方法を初学者向けに解説する．

2　向き付け

■内性の向き付け　3 次元空間中の線分を向き付ける際, 線分に沿った矢印によって, 図 1 のような二通りの方向付けを行なうことが可能である．

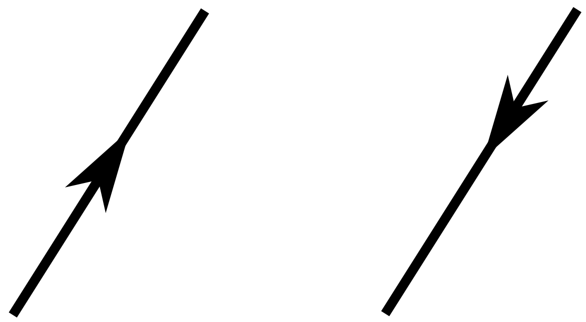

図 1　直線の 2 種類の内的向き付け

次に, 3 次元空間中の平面の向き付けを考える．平面上に, xy 座標を取る方法は図 2 上の 2 通りが考えられる．ここで, x 軸から y 軸に向かって回転する矢印を用いることにより, 図 2 下のように向きを図示することが可能である．以上のような向き付けは, 線分や平面が 3 次元空間に入っていることを用いていないため内性の向き付けと呼ばれる．

[*1] 私自身学部生の時代に非常に混乱した．

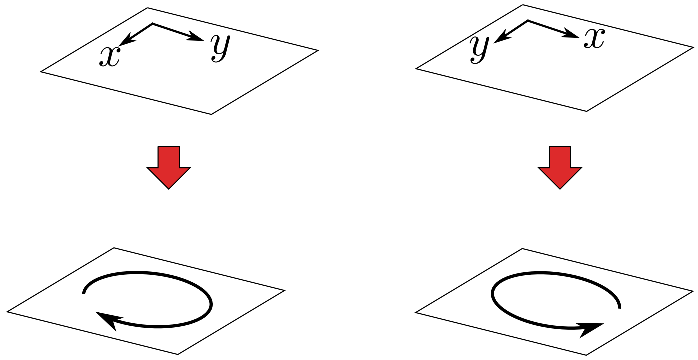

図 2　平面の 2 種類の内性の向き付け

■外性の向き付け　3 次元空間に入っていることを考えると別の向きの付け方を考えることもできる．イメージを掴むために, まず, 平面について上記とは異なる向きの付け方を考えてみよう．3 次元空間に 2 次元平面が入っているとき, $3-2=1$ 次元の空間が平面を横切る形で存在する．この横切る直線 (部分空間) の向きを付けることで, 平面を向き付けよう．線分と平面の交点が一点しかないことを横断と呼ぶ．考えている平面を横断する線分を考える [図 3(a)]．このとき, 横断する線分の内性の向きを平面の向きと考えることができる．この向きは横断的線分の取り方によらずに定まっている．このため, この方法で向き付けは図 3(b) のように 2 種類とることができる．このような向き付けは面の外性の向き付けと呼ばれる．これは, 法線ベクトルによって面の向きを定めているのとほぼ同義である．

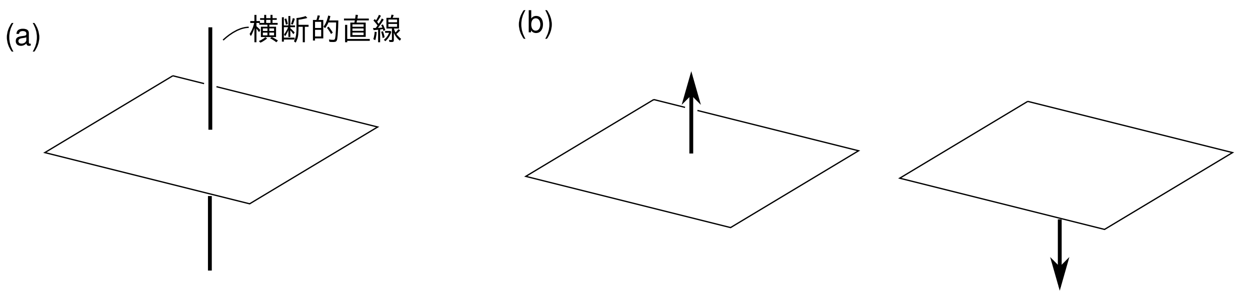

図 3　(a) 横断的直線 (b) 平面の外性の向き付け

次に線分の外性の向き付けについて考えてみよう．3 次元空間中の線分は 1 次元であり, 残り $3-1=2$ 次元であるため, この場合は線分に横断的な面を考える [図 4(a)]．横断的な面における内性の向き付けを考えることによって, 図 4(b) に示すように線分の外性の向き付けが得られる．

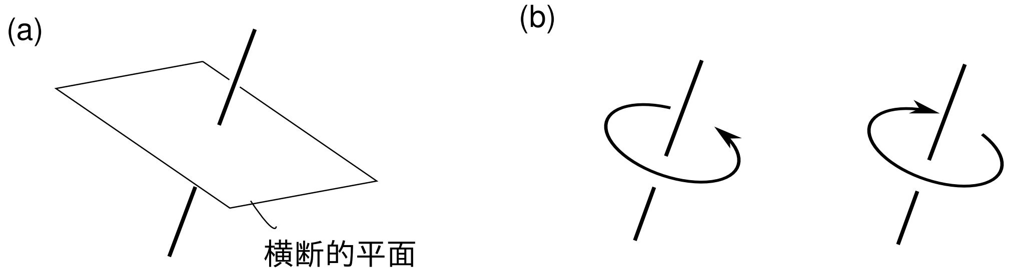

図 4　(a) 横断的平面 (b) 直線の外性の向き付け

3　極性ベクトルと軸性ベクトル

ベクトルとは向きの付いた線分であると言える．通常のベクトルは図 1 に示される内性の向きを付けた線分である．この線分に対し, スカラー倍と和が自然に定まることは高校で習った通りである．このように内的向き付けを用いたベクトルを極性ベクトルと呼ぶ．極性ベクトルは矢印で表すことができる．

一方で, 線分には外性の向きをつけることも可能である．このように外性の向きを持った線分を軸性ベクトルと呼ぶ (図 5)．軸性ベクトルは明確な幾何学的実体を持っていることに注意する．軸性ベクトルに対する和とスカラー倍は図 6 のように定められる．

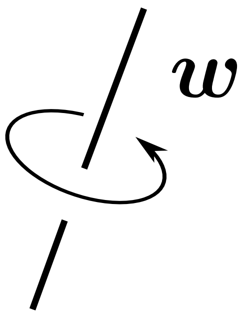

図 5　軸性ベクトル

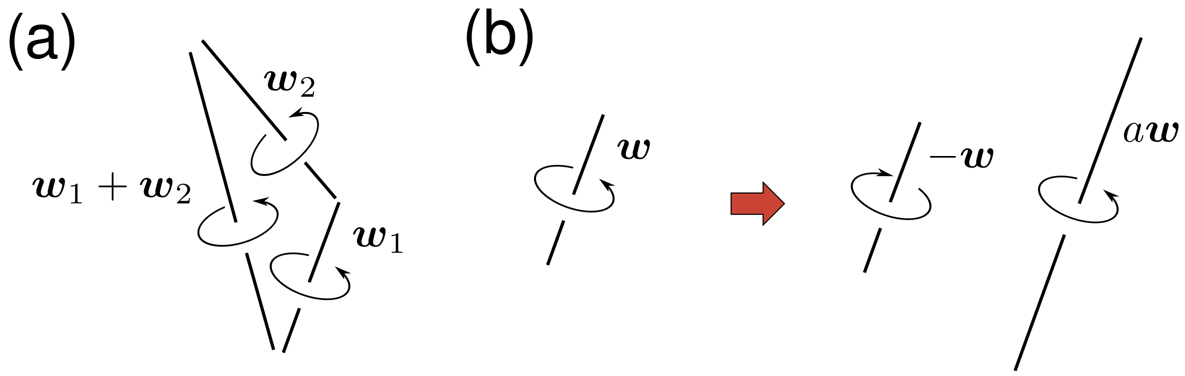

図 6　軸性ベクトルの演算 (a) 和 (b) スカラー倍

■極性ベクトルと軸性ベクトルの変換性　軸性ベクトルも極性ベクトルと同じように和とスカラー倍が定義されるとすると, これらの間の違いが現れる例はあるだろうか? これは鏡映反転を考えてみると良い. 平面 F に対する鏡映反転を $\mathcal{M}_F$ で表すとする. 極性ベクトルの $\mathcal{M}_F$ による変化を考える [図 7(a)]. F に平行な極性ベクトル $\boldsymbol{v}_\parallel$ に対しては

$$\mathcal{M}_F\boldsymbol{v}_\parallel=\boldsymbol{v}_\parallel \tag{1}$$

が成立する. 一方, 垂直な極性ベクトル $\boldsymbol{v}_\perp$ に対しては,

$$\mathcal{M}_F\boldsymbol{v}_\perp=-\boldsymbol{v}_\perp \tag{2}$$

となる.

一方で, 軸性ベクトルの場合を考える [図 7(b)]. F に平行な軸性ベクトル $\boldsymbol{w}_\parallel$ に対しては

$$\mathcal{M}_F\boldsymbol{w}_\parallel=-\boldsymbol{w}_\parallel \tag{3}$$

が成立する. F に垂直な軸性ベクトル $\boldsymbol{w}_\perp$ に対しては

$$\mathcal{M}_F\boldsymbol{w}_\perp=\boldsymbol{w}_\perp \tag{4}$$

となる. このように軸性ベクトルを鏡映反転した際には, 極性ベクトルとは符号が逆になっている.

空間反転 $\mathcal{I}$ は $x=0$, $y=0$, $z=0$ に対する鏡映反転 $\mathcal{M}_x$, $\mathcal{M}_y$, $\mathcal{M}_z$ の合成として, $\mathcal{I}=\mathcal{M}_x\mathcal{M}_y\mathcal{M}_z$ のように書ける. このため, 任意の極性ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して,

$$\mathcal{I}\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v} \tag{5}$$

が成立する. 軸性ベクトル $\boldsymbol{w}$ に対しては,

$$\mathcal{I}\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w} \tag{6}$$

となることがわかる.

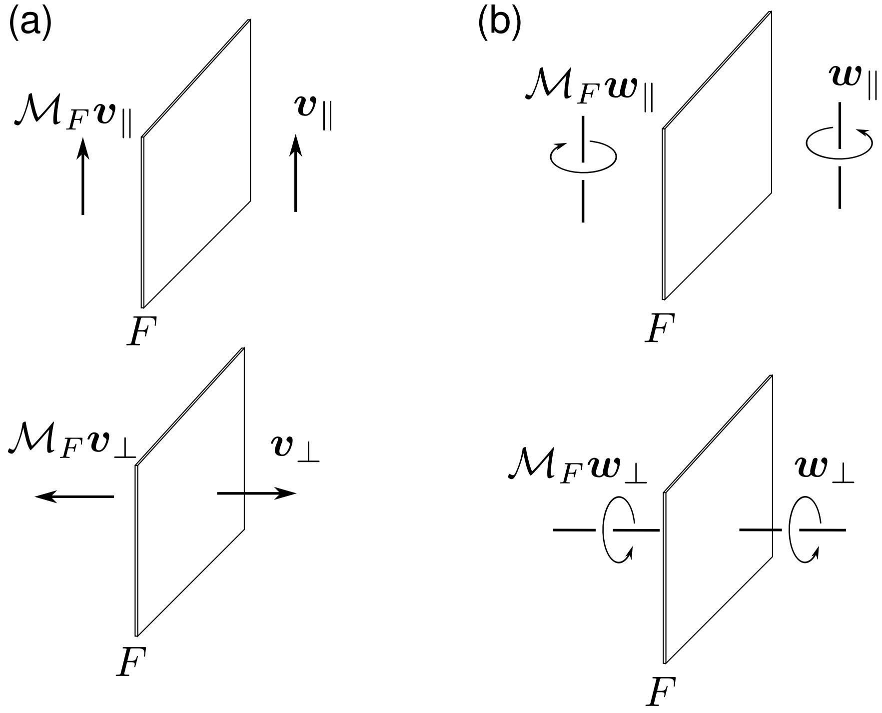

図 7　鏡映反転 (a) 極性ベクトル (b) 軸性ベクトル

■**軸性ベクトルの極性ベクトル表示**　軸性ベクトル $\boldsymbol{w}$ は座標系を固定すると極性ベクトルとして表示できる．このことを説明しよう．空間に座標系を導入したとき，その座標系が右手系であることを R とし，左手系であることを L と書く．こうした座標系の向き o に対し，対応する手を用意する．この手の人指し指から小指までをあてがうことで，図 8 のように，極性ベクトル $\boldsymbol{w}_o$ が定まる．$-o$ を o と逆の向きの座標系を表すことにすると，

$$\boldsymbol{w}_{-o} = -\boldsymbol{w}_o \tag{7}$$

が成立することがわかる．以上のように 3 次元空間全体の座標系を定めると右手・左手のどちらかが定まり，軸性ベクトルは極性ベクトルとして表されることがわかった．軸性ベクトルは 3 次元空間全体の向きに依存した量のように一見すると見えるが，**空間の向き付けに無関係な幾何学的対象である**．この事実は見過されがちである．

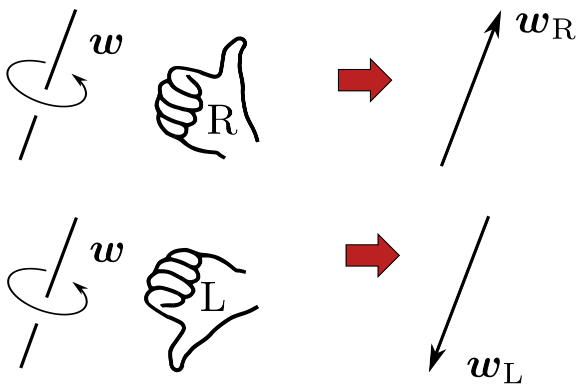

図 8　軸性ベクトルの極性ベクトル表示

4　軸性ベクトルの例

軸性ベクトルの例を考えてみよう．まず, ある軸回りに回る物体の角速度ベクトルはまさに軸性ベクトルと考えるべきであることがわかる．

極性ベクトルのベクトル積は通常, 右ネジ則を用いてベクトルの向きを定めている．左手系を使うときは左ネジ則を用いることにすると, 極性ベクトルのベクトル積を軸性ベクトルと考えることができる．このような量としては, ベクトル積の角運動量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$ が挙げられる．角運動量は $\boldsymbol{r}$ 方向から $\boldsymbol{p}$ 方向へむかう回転の度合いを表す量であるから, 軸性ベクトルで表す方が適当であることもわかる．

磁場 $\boldsymbol{H}$ も軸性ベクトルである．これは, 電流 I が流れている状況を考えると良くわかる．通常, 電流 I に対し, 図 9(a) のように右ネジ方向に磁場ができると刷り込みがなされている．しかしながら, 電磁気学では右手系・左手系の区別がないはずであるから, これはおかしい．この問題を解決するためには軸性ベクトルを用いると良い．軸性ベクトルを用いて正しく図示したものを図 9(b) に示す．この状況を右手系を持って極性ベクトル表示したものが (a) である．しかしながら, 磁場そのものは座標系の向きによらないものであるから, 図 9(b) のように軸性ベクトルを使って図示するのが正しいやりかたである．

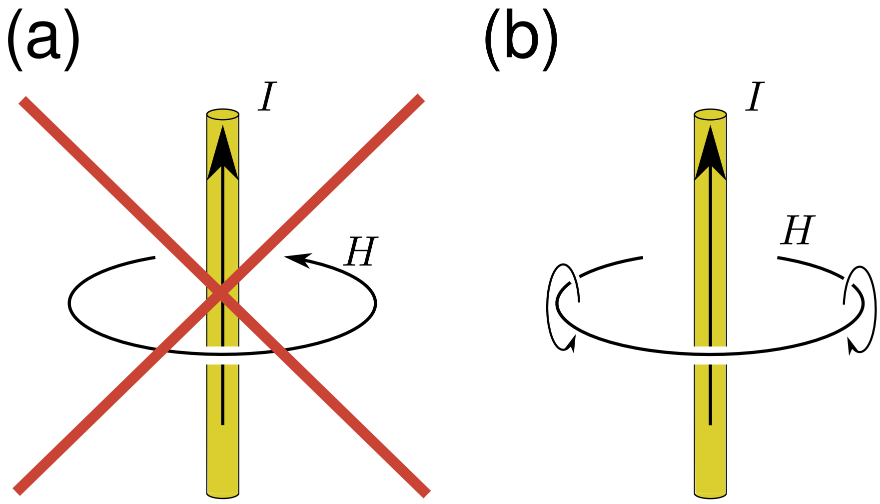

図 9　電流の作る磁場 (a) 不適切な図示 (b) 適切な図示

5　おわりに

軸性ベクトルは空間反転に対して符号を変えないため, 幾何学的実体ではないと考えられることが多いように思われる. しかしながら, 本稿であつかったように, 軸性ベクトル自体が回転する線分のイメージを持っており, 直感的に理解可能なものであることがわかる. 本稿が悩める学部生の一助になれば幸いである.

参考文献

[1] W. L. Burke, “Applied Differential Geometry,” Cambridge University Press (1985).

[2] 五十嵐 一, 加川 幸雄, アラン ボサビ, 亀有 昭久, 西口 磯春,「新しい計算電磁気学—基礎と数理」, 培風館 (2003).