電磁気学のための多様体論入門

中田 陽介

2012 年 10 月 13 日

1　はじめに

本ノートでは, 多様体の基礎概念を紹介した後, 曲面上の微積分の整備し, 使えるようになることを目的とします. 多様体は見慣れたものではありますが, でてくる概念を式に直すと, 直感的描像に較べ随分とややこしいと感じると思います. このため, お茶会後も時間をかけてなじませるように努力されると良いかと思います. 時間の制約を考え, 不要な定理の証明は省略していますので, 関心がある方は参考文献の方に目を通されることをお勧めします.

2　多様体

■多様体とは?　世の中はなめらかな曲面が溢れています. たとえば, 球面や, ドーナッツの表面を表すトーラスが挙げられます.

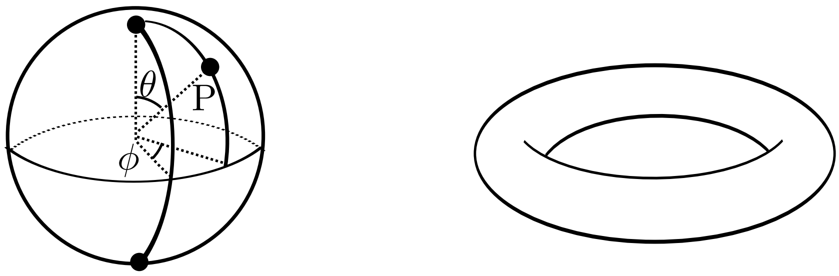

図 1　多様体の例

これらは, 平面とは異なり, 全体で 1 つの座標系を取る事ができません. 例えば球面を極座標 (θ, ϕ) でかくと, θ, ϕ の定義域は $(0, \pi)$, および, $(0, 2\pi)$ となります. 北極と南極を

結ぶ経度が 0 の線分を表せていないことに注意してください．しかし, 複数の座標系を利用することで, 球面全体を扱うことができます．このように, 局所的には m 次元 Euclid 空間と同じ座標が取れる m 次元超曲面を m 次元多様体と呼びます．トーラスや球面は 2 次元多様体となります．

ここで述べた座標をもう少しちゃんとした言葉で定義しておきましょう．今, 対象とする幾何学的な集合を M とかきます．座標とは, M から $\mathbb{R}^2$ の部分集合への連続全単射 ψ のことです．ψ を用いることで, 図に示すように, $\mathbb{R}^2$ の座標が M に導入されることがわかると思います．すなわち, 各点 P に対し, $(x^1(\mathrm{P}), \cdots, x^m(\mathrm{P})) \in \mathbb{R}^m$ が定まります．

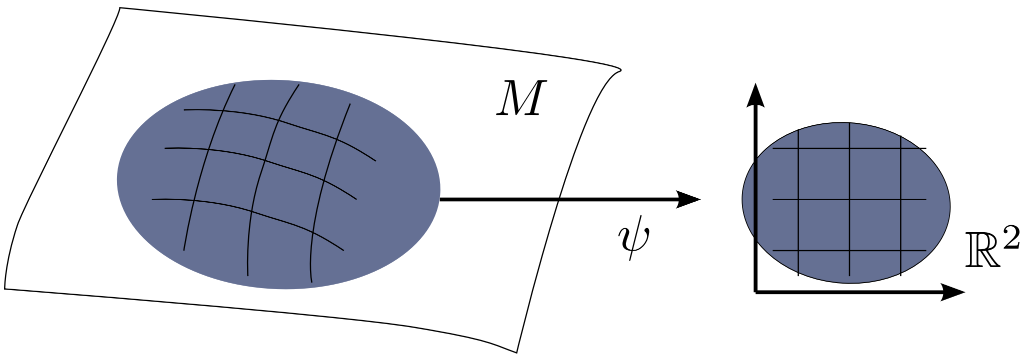

図 2　座標

■多様体上の関数　座標を用いると多様体 M から, $\mathbb{R}$ への関数 f を具体的に書き下すことができます．M に局所座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ が入っているとき, 関数 f は座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ を用いて $f(x^1, \cdots, x^m)$ のように表すことができます．f としてはどんな座標を取っても何度でも微分可能なもの (**可微分**と呼ぶ) を対象にします．座標 $x^i : M \to \mathbb{R}$ も多様体上の可微分関数です．

■座標変換　複数の座標がある場合, それらの間の変換はたとえば, $\psi \circ \varphi^{-1}$ で表されます．この写像を**座標変換**と呼びます．座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ から $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)$ への座標変換は, 座標表示を用いると, $\left(\bar{x}^1(x^1, \cdots, x^m), \cdots, \bar{x}^m(x^1, \cdots, x^m)\right)$ と表せます．

例 1. 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^2$ の座標として, 通常の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の他にも様々なものが取れる．たとえば, 極座標 (r, θ) を考えてもよい．ここで, $r \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 2\pi)$ であり, 一部極座標で表されない領域がある事に注意する．これらの間の座標変換は次で与え

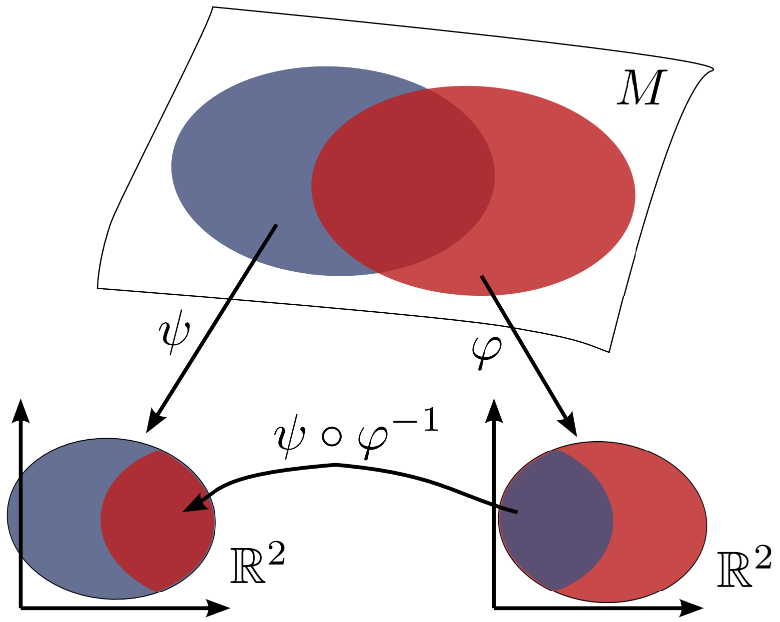

図 3　座標変換

られる．

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$
$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{2}$$

逆写像は

$$x = r \cos \theta \tag{3}$$
$$y = r \sin \theta \tag{4}$$

で与えられる．この座標変換は定義域内で何度でも微分できる．

3　接ベクトル空間

■接ベクトルの定義　ここでは多様体における接ベクトルについて考えてみます．球面の場合を例に説明します．球面上の点 P を考えます．P から生える接ベクトルを $\boldsymbol{v}$ で表します．P におけるすべての接ベクトル全体の集合を $\mathrm{T_P}M$ とかきます．$\mathrm{T_P}M$ は P における接平面と考えることができます．

この定義がよくないのは，球面を考える際に，球面の入れものとしての 3 次元空間を仮定していることです．実際，接平面は球面からはみ出しています．

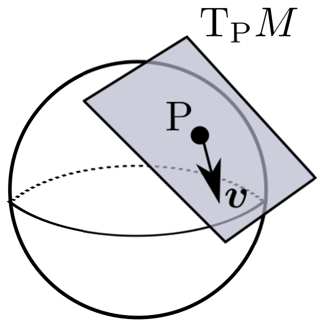

図 4　接ベクトル

しかし, 上記の幾何学的イメージをそのままに多様体からはみ出すことなく接ベクトルを定義する上手い方法があります. それは, 点 P における微分演算子を接ベクトルと見なす方法です. 座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ が多様体 M に入っているとします. このとき, 点 P で関数 f を微分する微分演算子として, $(\partial/\partial x^i)_{\mathrm{P}}$ を考えることができます. $(\partial/\partial x^i)_{\mathrm{P}}$ は以下のように多様体上の関数 f に作用します.

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}} f := \left(\frac{\partial}{\partial x^i} f(x^1, \cdots, x^m)\right)_{\mathrm{P}}. \tag{5}$$

右辺は通常の関数の微分で, 下付きの P は, P における座標値を最後に代入することを意味します. $(\partial/\partial x^i)_{\mathrm{P}}$ は P において座標 x^i が増える方向に向いたベクトルと解釈できます.

このように得られた座標基底の実線形和を点 P の**接ベクトル**と呼びます.

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{m} v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}}$$

ここで, Einstein の略記として, 以下のように和の記号を省略することにします.

$$\boldsymbol{v} = v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}} \tag{6}$$

点 P における接ベクトルをすべて集めて作った m 次元ベクトル空間を M の P における**接空間**と呼び $\mathrm{T_P}M$ で表します.

■関数の引き戻し　多様体 M から N への可微分写像 f を考えてみます. M の座標を $(x^1, \cdots, x^m)$, N の座標を $(y^1, \cdots, y^n)$ と書くと, 写像 f の座標表示は, $i = 1, \cdots, n$ に対し, $y^i = f^i(x^1, \cdots, x^m)$ となります. f が定まると, 多様体 N 上の関数 g に対して,

$f^*g = g \circ f$ を考えることで, 多様体 M 上の関数を作ることができます. f^*g を g の**引き戻し**と呼びます.

■**ベクトルの押し出し**　M の接空間 $\mathrm{T_P}M$ から, N の接空間 $\mathrm{T}_{f(\mathrm{P})}N$ への写像が定まります. これを**押し出し**と呼びます. $\boldsymbol{v} \in \mathrm{T_P}M$ の押し出しを $f_*\boldsymbol{v}$ と書き, 与えられた N 上の関数に対して以下のように作用するように定義します.

$$(f_*\boldsymbol{v})g = \boldsymbol{v}(f^*g) \tag{7}$$

右辺は P 点での $\boldsymbol{v}$ による f^*g の微分です. 具体的に, $f_*\boldsymbol{v}$ を座標表示してみましょう. M の座標 $(x^1, \cdots, x^m)$, N の座標を $(y^1, \cdots, y^n)$ とします. $\boldsymbol{v} = v^i(\partial/\partial x^i)_\mathrm{P}$ と展開します. 右辺を連鎖律を用いて計算してみると,

$$v^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_\mathrm{P} g\left(f^1(x), \cdots, f^n(x)\right) = \left\{v^i \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_\mathrm{P} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(\mathrm{P})}\right\} g \tag{8}$$

となります. 中括弧に着目すると,

$$f_*\boldsymbol{v} = v^i \left(\frac{\partial f^j}{\partial x^i}\right)_\mathrm{P} \left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{f(\mathrm{P})} \tag{9}$$

となります. 結局, $f_*\boldsymbol{v}$ を計算するには, $\boldsymbol{v}$ に f の Jacobi 行列をかければ良いことがわかりました. すなわち, $f_*\boldsymbol{v}$ は写像 f の一次近似になっています.

4　外積代数

ここまでで多様体上の各点 P に接空間 $\mathrm{T_P}M$ が付属していることがわかったと思います. $\mathrm{T_P}M$ は足し算とスカラー倍ができるので, ベクトル空間になっています.

一般的に m 次元ベクトル空間 V が与えられたとき, さらに代数的に高次の量や演算を定義できます. ここでは, そのような操作について簡単に紹介します.

■**テンソル**　k 個のベクトル $(v_1, \cdots, v_k) \in V \times \cdots \times V$ から $\mathbb{R}$ への多重線形関数を **k 階の共変テンソル**と呼びます. ここで, $\mathcal{T}$ が多重線形であるとは, 各スロットに対し以下のように線形性が成立することを指します $(a, b \in \mathbb{R})$.

$$\mathcal{T}(\cdots, av + bw, \cdots) = a\,T(\cdots, v, \cdots) + b\,T(\cdots, w, \cdots) \tag{10}$$

1 階の共変テンソルは**コベクトル**と呼ばれます. コベクトル全体が作る集合を V^* と書きます. V^* は双対空間と呼ばれます.

■テンソル積　k 階共変テンソル $\mathcal{S}$ と l 階共変テンソル $\mathcal{T}$ がある場合, それらのテンソル積 $\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}$ を次のように定めることができます.

$$\mathcal{S}\otimes\mathcal{T}(v_1,\cdots,v_k,v_{k+1},\cdots,v_{k+l})=\mathcal{S}(v_1,\cdots,v_k)\,\mathcal{T}(v_{k+1},\cdots,v_{k+l}) \tag{11}$$

テンソル積は次の性質を持ちます.

$$(\mathcal{S}\otimes\mathcal{T})\otimes\mathcal{U}=\mathcal{S}\otimes(\mathcal{T}\otimes\mathcal{U}) \tag{12}$$

$$(a\,\mathcal{S}+b\,\mathcal{T})\otimes\mathcal{U}=a\,\mathcal{S}\otimes\mathcal{U}+b\,\mathcal{T}\otimes\mathcal{U} \tag{13}$$

$$\mathcal{U}\otimes(a\,\mathcal{S}+b\,\mathcal{T})=a\mathcal{U}\otimes\mathcal{S}+b\mathcal{U}\otimes\mathcal{T} \tag{14}$$

(テンソル $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{U}$, および, $a,b\in\mathbb{R}$ とします.)

■テンソルの空間の基底　V の基底を e_i $(i=1,\cdots,n)$ とします. 次のような双対基底 $e^i\in V^*$ を導入します.

$$e^i(e_j)=\delta^i_j \tag{15}$$

δ^i_j は $i=j$ のとき 1, それ以外では 0 を表す Kronecker のデルタです.

k 階の共変テンソルに対し,

$$\mathcal{T}_{i_1\cdots i_k}=\mathcal{T}(e_{i_1},\cdots,e_{i_k}) \tag{16}$$

が定まります. ここで, $v_i={v_i}^j e_j\in V$ に対し,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}(v_1,\cdots,v_k)&={v_1}^{i_1}\cdots{v_k}^{i_k}\mathcal{T}_{i_1\cdots i_k}\\&={v_1}^{i_1}\cdots{v_k}^{i_k}\mathcal{T}(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})\\&=\mathcal{T}({v_1}^{i_1}e_{i_1},\cdots,{v_k}^{i_k}e_{i_k})\\&=\mathcal{T}(v_1,\cdots,v_k)\end{aligned} \tag{17}$$

より,

$$\mathcal{T}=\mathcal{T}_{i_1\cdots i_k}e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k} \tag{18}$$

が成立します. この式は, $e^{i_1}\otimes\cdots\otimes e^{i_k}$ が k 階の共変テンソルの空間で基底になっている事を意味します. これから, k 階の共変テンソル全体を $\bigotimes^k V^*$ と表します. $\mathcal{T}_{i_1\cdots i_k}$ を $\mathcal{T}$ の $i_1\cdots i_k$ 成分と呼びます. $\bigotimes^k V^*$ の次元は m^k です.

■反対称テンソル　k 階の共変テンソル $\mathcal{T}$ で以下のように任意の 2 つのスロットの入れ変えに関して, 符号が反転するようなものを, **反対称テンソル**と呼びます.

$$\mathcal{T}(\cdots, v, \cdots, w, \cdots) = -\mathcal{T}(\cdots, w, \cdots, v, \cdots) \tag{19}$$

これは成分で表すと, $\mathcal{T}_{i_1 \cdots i_k}$ が任意の 2 つの i の入れ替えに対して, 符号が反転することと同じでです. このような反対称テンソルは面積要素などを含むため, 多様体論では重要な役割を果たします.

もし, $\mathcal{T}$ が反対称でない場合, 次のような操作で反対称化することが可能です.

$$\begin{aligned} A_k(\mathcal{T}) &= \mathcal{T}_{[i_1 \cdots i_k]} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \\ &= \frac{1}{k!} \delta^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_k} \mathcal{T}_{j_1 \cdots j_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \end{aligned} \tag{20}$$

ただし,

$$\mathcal{T}_{[i_1 \cdots i_k]} = \frac{1}{k!} \delta^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_k} \mathcal{T}_{j_1 \cdots j_k} \tag{21}$$

と定め, 一般化 Kronecker のデルタ $\delta^{j_1 \cdots j_k}_{i_1 \cdots i_k}$ を, $(i_1, \cdots, i_k)$ が $(j_1, \cdots, j_k)$ の偶置換となる時 1, 奇置換の時 -1, それ以外の時 0 となるものとして導入しました. ここで, 2 つの共変テンソル $\mathcal{S}$, $\mathcal{T}$ に対し, 次の補題が成立します.

$$A_{k+l}(A_k(\mathcal{S}) \otimes A_l(\mathcal{T})) = A_{k+l}(\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}) \tag{22}$$

すなわち, 反対称化は最後に 1 度やれば十分ということです.

例 2. 2 階の反対称テンソルは反対称行列で書ける. たとえば, 2 次元ベクトル空間上では,

$$[\mathcal{T}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{23}$$

がある.

問題 1. 式 (22) を証明せよ.

■内部積　k 階の共変テンソル $\mathcal{T}$ に対し, ベクトル w をはじめのスロットに入れる操作を内部積を取ると言い, $w \lrcorner \mathcal{T}$ で表します. 式で書くと, $w \lrcorner \mathcal{T}$ の働きは

$$w \lrcorner \mathcal{T}(v_1, \cdots, v_{k-1}) = \mathcal{T}(w, v_1, \cdots, v_{k-1}) \tag{24}$$

と表わせます. 内部積を取ることで, スロット数が一個減り, $k-1$ 階の共変テンソルになります.

■wedge 積　k 階の反対称テンソル α と l 階の反対称テンソル β から $k+l$ 階の反対称テンソル $\alpha \wedge \beta$ が次のように定まります[*1].

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(k+l)!}{k!\,l!} A_{k+l}(\alpha \otimes \beta). \tag{25}$$

$\wedge$ を wedge 積と呼びます. 式 (25) は以下のように基底に対する反対称化とも考えることができます.

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \beta &= \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \alpha_{[i_1 \cdots i_k} \beta_{i_{k+1} \cdots i_{k+l}]} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_{k+l}} \\
&= \frac{1}{k!\,l!} \delta^{j_1 \cdots j_{k+l}}_{i_1 \cdots i_k} \alpha_{j_1 \cdots j_k} \beta_{j_{k+1} \cdots j_{k+l}} \otimes e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_{k+l}} \\
&= \frac{(k+l)!}{k!\,l!} \alpha_{j_1 \cdots j_k} \beta_{j_{k+1} \cdots j_{k+l}} \otimes e^{[j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_{k+l}]}.
\end{aligned} \tag{26}$$

k 階の反対称テンソル α と l 階の反対称テンソル β, m 階の反対称テンソル γ, および, $a, b \in \mathbb{R}$ に対して, wedge 積は次の性質を満たします.

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha, \tag{27}$$

$$\alpha \wedge (a\,\beta + b\,\gamma) = a\,\alpha \wedge \beta + b\,\alpha \wedge \gamma, \tag{28}$$

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma. \tag{29}$$

問題 2. $e^i \wedge e^j$ を計算してみよ.

[*1] 係数の取り方については付録参照.

■反対称テンソルの成分表示　次に反対称テンソル ω の成分表示を考えてみましょう.

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{i_1\cdots i_k} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \\ &= \omega_{[i_1\cdots i_k]} e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k} \\ &= \omega_{i_1\cdots i_k} e^{[i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k]}. \end{aligned} \tag{30}$$

ここで, 反対称化は最後にすれば十分であることを用いて

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} &= \frac{k!}{(k-1)!} A_k \left(e^{i_1} \otimes (e^2 \wedge \cdots \wedge e^k) \right) \\ &= k!\, A_k (e^{i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k}) \\ &= k!\, e^{[i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k]}. \end{aligned} \tag{31}$$

よって,

$$e^{[i_1} \otimes \cdots \otimes e^{i_k]} = \frac{1}{k!} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}. \tag{32}$$

式 (32) を式 (30) に代入することで,

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{k!} \omega_{i_1\cdots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \\ &= \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} \omega_{i_1\cdots i_k} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \end{aligned} \tag{33}$$

を得ます. この式は, $\{e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} | i_1 < \cdots < i_k\}$ が k 階の反対称テンソルの基底になっている事を示しています. このため, k 階の反対称テンソル全体を $\bigwedge^k V^*$ と表すことにします. $\bigwedge^k V^*$ の次元は ${}_m\mathrm{C}_k$ です (V は m 次元とした).

■$e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ の幾何学的意味　式 (32) より, ベクトル $v_1, \cdots, v_k$ に対して,

$$\begin{aligned} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} (v_1, \cdots, v_k) &= \delta^{i_1\cdots i_k}_{j_1\cdots j_k} e^{j_1}(v_1) \cdots e^{j_k}(v_k) \\ &= \det \begin{bmatrix} e^{i_1}(v_1) & \cdots & e^{i_k}(v_1) \\ e^{i_2}(v_2) & \cdots & e^{i_2}(v_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e^{i_k}(v_k) & \cdots & e^{i_k}(v_k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{34}$$

特に, $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} (e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = 1$. が成立します. すなわち, $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ は $(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$ で張られる平行 $k!$ 超面体の符号付き体積を与える反対称テンソルと考えることができます.

■**座標変換との関係**　ここでは, 基底 (e_i) を $(\bar{e}_i)$ に取り替えた場合の成分の変換について調べてみます.

$$\bar{e}_i = e_j L^j{}_i \tag{35}$$

のように基底変換が行なわれたとします. このとき, 双対基底の変換を

$$e^i = R^i{}_j \bar{e}^j \tag{36}$$

のように書き, $R^i{}_j$ を計算してみます. これには, 式 (35) の両辺に e^j を作用させればよいです.

$$\begin{aligned} L^j{}_i &= e^j(\bar{e}_i) \\ &= R^j{}_k \bar{e}^k(\bar{e}_i) \\ &= R^j{}_k \delta^k_i \\ &= R^j{}_i. \end{aligned}$$

よって, 双対基底は,

$$\bar{e}^i = (L^{-1})^i{}_j e^j \tag{37}$$

と変換します. ただし, L^{-1} は $[L^j{}_i]$ の逆行列です.

　このとき, ベクトルの成分は

$$\begin{aligned} \bar{v}^i &= \bar{e}^i(v^j e_j) \\ &= (L^{-1})^i{}_k e^k(v^j e_j) \\ &= (L^{-1})^i{}_k \delta^k_j v^j \\ &= (L^{-1})^i{}_j v^j \end{aligned}$$

より,

$$\bar{v}^i = (L^{-1})^i{}_j v^j \tag{38}$$

のように L^{-1} で変換します. このため, 通常のベクトルは反変ベクトルと呼ばれます.

　コベクトルの成分の変換則は,

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}_i &= \alpha_j e^j(\bar{e}_i) \\ &= \alpha_j e^j(e_k L^k{}_i) \\ &= \alpha_j \delta^j_k L^k{}_i \\ &= \alpha_j L^j{}_i \end{aligned}$$

となります. すなわち,

$$\bar{\alpha}_i = L^j{}_i \alpha_j \tag{39}$$

のように, L で変換します. このため, コベクトルは共変ベクトルとも呼ばれます. 共変テンソルの成分はテンソル積された基底が変換することから

$$\bar{\mathcal{T}}_{i_1\cdots i_k} = L^{j_1}{}_{i_1} \cdots L^{j_k}{}_{i_k} \mathcal{T}_{j_1\cdots j_k} \tag{40}$$

となります.

結局, 上付き添字, 下付き添字は L^{-1} で変換するか, L で変換するかの違いを表していたわけです. 上付きと下付きの和が取られるとき, $LL^{-1} = I$ のようになり, 座標によらない幾何対象を扱うことになります. ここに Einstein 記法のミソがあります.

■接ベクトルの座標変換　$V = \mathrm{T_P}M$ の場合, L がどのように書けるかを調べてみましょう. M において (x^i) から $(\bar{x}^i)$ へ座標変換を行なったとします. $e_i = \partial/\partial x^i$, $\bar{e}_i = \partial/\partial \bar{x}^i$ ととります. 微分の連鎖則を用いると,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i}\right)_{\mathrm{P}} = \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right)_{\mathrm{P}} \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_{\mathrm{P}} \tag{41}$$

となります. すなわち,

$$L^j{}_i = \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right)_{\mathrm{P}}. \tag{42}$$

となります. 逆行列は, 微分の連鎖律より

$$(L^{-1})^j{}_i = \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{\mathrm{P}} \tag{43}$$

となります. ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分は,

$$\bar{v}^i = \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)_{\mathrm{P}} v^j \tag{44}$$

のように変換します. 結局, Jacobi 行列を掛けることで, ベクトルの座標変換が行なえることがわかりました. これは座標変換を線形近似した事に対応します.

コベクトル α の成分は

$$\bar{\alpha}_i = \left(\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\right)_{\mathrm{P}} \alpha_j \tag{45}$$

と変換されます.

高階のテンソルの変換も同様です.

問題 3. 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^2$ を考える. xy 座標から, 極座標 (r, θ) へ移る時の L, L^{-1} を計算してみよ.

5 多様体上のなめらかな場

今までは, 多様体 M のある P における接空間 $\mathrm{T_P}M$ について述べてきました. 接空間は多様体上の各点にあるわけで, 多様体上の各点に幾何学的対象を割り振った**場**を考えることもできます.

■ベクトル場 各点 P に対して, $\boldsymbol{v}_\mathrm{P}$ が割り当てられているとします. この時, 座標を用いると

$$\boldsymbol{v} = v^i(x^1, \cdots, x^m) \frac{\partial}{\partial x^i} \tag{46}$$

のように展開できます. $v^i(x^1, \cdots, x^m)$ はなめらかであるとします. このような $\boldsymbol{v}$ を**ベクトル場**と呼びます.

■微分形式 多様体 M 上の k 階の反対称テンソル場を k **次微分形式**と呼びます. 0 次微分形式はただの関数です. $e_i = \partial/\partial x^i$ と取ってみます. $\partial/\partial x^i$ の双対基底は $\mathrm{d}x^i$ と書くことにします. k 次微分形式 ω は次のように座標表示できます.

$$\omega = \frac{1}{k!} \omega_{i_1 \cdots i_k}(x^1, \cdots, x^k)\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \tag{47}$$

ただし, $\omega_{i_1 \cdots i_k}(x^1, \cdots, x^k)$ は微分可能とします. M 上の k 次微分形式全体がなす集合を $\bigwedge^k \mathrm{T}^* M$ と書きます.

6 外微分

$\omega \in \bigwedge^k \mathrm{T}^*M$ に対して, $\mathrm{d}\omega \in \bigwedge^{k+1} \mathrm{T}^*M$ を以下のように定義します.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \frac{1}{k!}\frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\ &= \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}. \end{aligned} \tag{48}$$

この定義がよくできているのは, 座標 x の取り方によらずに微分が定まること です (証明は省略). この理由で, 長さの概念を用いずに微分形式の微積分が可能になります. また, この定義は双対基底の変換則

$$\mathrm{d}\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\mathrm{d}x^j. \tag{49}$$

とも合致します.

$a, b \in \mathbb{R}$, k 次微分形式 ω, l 次微分形式 τ に対して, d は以下の性質を満たします.

$$\mathrm{d}(a\,\omega + b\,\tau) = a\,\mathrm{d}\omega + b\,\mathrm{d}\tau, \tag{50}$$

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \tau) = (\mathrm{d}\omega) \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\tau. \tag{51}$$

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0 \tag{52}$$

問題 4. 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^2$ において $f = x^2 + y^2 = r^2$ の外微分 $\mathrm{d}f$ を直交座標, 極座標で計算し座標の取り方によらず, $\mathrm{d}f$ が定まっていることを示せ.

問題 5. 3 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^3$ において (x, y, z) 座標を取って 0, 1, 2 次微分形式の外微分が grad, curl, div に対応することを具体的に示せ.

7 共変テンソルの引き戻し

多様体 M から N への可微分写像 f があるとき, f の 1 次近似として, M の各接空間から N の接空間への変換 f_* が定まりました. この双対として, 共変テンソルには引き戻し f^* が定義できます (関数の場合はすでにやりました.).

$\bigotimes^k \mathrm{T}^*_{f(\mathrm{P})}N$ の k 階共変テンソル $\mathcal{T}$ の $\bigotimes^k \mathrm{T}^*_{\mathrm{P}}M$ への引き戻しは, $\boldsymbol{v}_i \in \mathrm{T}_{\mathrm{P}}M$ への作用として以下のように定義されます.

$$(f^*\mathcal{T})(\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k) = \mathcal{T}(f_*\boldsymbol{v}_1, \cdots, f_*\boldsymbol{v}_k). \tag{53}$$

M の座標 (x^i), N の座標 (y^j) を用い, f を $y^j = f^j(x^1, \cdots, x^m)$ と表し, 具体的に引き戻しを座標表示してみると,

$$\begin{aligned}
(f^*\mathcal{T})_{i_1 \cdots i_k} =& (f^*\mathcal{T})\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)_{\mathrm{P}}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)_{\mathrm{P}}\right) \\
=& \mathcal{T}\left(\left(\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_{\mathrm{P}} \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_1}}\right)_{f(\mathrm{P})}, \cdots, \left(\frac{\partial f^{j_k}}{\partial x^{i_k}}\right)_{\mathrm{P}} \left(\frac{\partial}{\partial y^{j_k}}\right)_{f(\mathrm{P})}\right) \\
=& \left(\frac{\partial f^{j_1}}{\partial x^{i_1}}\right)_{\mathrm{P}} \cdots \left(\frac{\partial f^{j_k}}{\partial x^{i_k}}\right)_{\mathrm{P}} \mathcal{T}_{j_1 \cdots j_k}
\end{aligned} \tag{54}$$

となります (だいたい座標変換と同じ).

N 上の共変テンソル場に対しては, 各点で引き戻しを行なうことで, M 上の共変テンソル場に引き戻すことができます. 定義より明らかなように, 反対称共変テンソルの引き

戻しは, 反対称共変テンソルになります. よって, 微分形式の引き戻しは微分形式となります.

■wedge 積および, 外微分との関連　多様体 M から N への可微分写像 f があるとき, 微分形式の引き戻し f^* が定まります. $\omega, \lambda \in \bigwedge^k \mathrm{T}^*N$, $\tau \in \bigwedge^l \mathrm{T}^*N$ に対し, 引き戻しは以下の性質を持ちます.

$$f^*(\omega + \lambda) = f^*(\omega) + f^*(\lambda), \tag{55}$$

$$f^*(\omega \wedge \tau) = f^*(\omega) \wedge f^*(\tau). \tag{56}$$

ただし, 0 形式 $\omega = g$ に対して, 式 (56) は $f^*(g\tau) = f^*g f^*(\tau)$ と解釈することにします.

また, 引き戻しは, 外微分と可換になることが知られています. すなわち, $\omega \in \bigwedge^k \mathrm{T}^*M$ に対し,

$$\mathrm{d}f^*\omega = f^*\mathrm{d}\omega \tag{57}$$

が成立します. 具体的な問題では, これらの定理を使って, 定義に戻らず, 引き戻しを計算することが多いです.

問題 6. 座標 (s,t) を持つ $\mathbb{E}^2$, 座標 (x,y,z) を持つ $\mathbb{E}^3$ への可微分写像 f として, $x = s^2 + t^2$, $y = st$, $z = s + t$ を考える. このとき, $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$ の引き戻しを計算せよ.

8　微分形式の積分と Stokes の定理

微分形式は積分の中に現れる $f(x)\mathrm{d}x$ などの一般化になっています. このため, 微分形式は多様体上で積分することが可能です. たとえば 2 次元 Euclid 空間 $\mathbb{E}^2$ で

$$\omega = f\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = -f\mathrm{d}\bar{x} \wedge \mathrm{d}\bar{y} \tag{58}$$

について考察します．ただし, f は有限領域のみで値を取る $\mathbb{E}^2$ 上の関数で $\bar{x} = y$, $\bar{y} = x$ とおきました．$\mathbb{E}^2$ 上で ω の積分を考えてみましょう．

$$\int_{\mathbb{E}^2} \omega := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 1 \tag{59}$$

としたくなります．しかし, このように $\wedge$ を落とすだけでは,

$$\int_{\mathbb{E}^2} := -\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{d}\bar{x} \, \mathrm{d}\bar{y} = -1 \tag{60}$$

と異なる結果になってしまいます．ここで, 積分するにあたって多様体の向きを決めておく必要があります．

■多様体の向き　多様体 M の共通部分を持つ 2 つの座標 $(x^1, \cdots, x^n)$, $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n)$ を考えます．このとき, 共通部分で $\det[\partial x^j / \partial \bar{x}^i] > 0$ が成り立つとき, $(x^1, \cdots, x^n)$ と $(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^n)$ は同じ向きを持つと言います．

M 全体を同じ向きを持った座標で覆うことができるとき, M は向き付け可能と言います．連結な多様体の場合, 多様体は 2 つの種類の座標に分類できます．このうち, 片側の種類を正の座標と決めることを, 多様体 M に向きを付けると言います．

上では座標の意味で, 向きを定義しましたが, これが, 接空間でどのような意味を表すか考えてみます．正の座標 (x^i) を取ると, $(\partial / \partial x^i)$ が各点で定まります．基底の変換は

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \tag{61}$$

で与えられるので, 正の座標系を取ることは, 連続的に各点における接空間の基底を正と負の 2 種類にわけることに対応します．つまり, 各接空間が向き付けられます．接空間上で基底を分類することは, それぞれの正の基底に対して 1, 負の基底に対して, -1 を取る関数 o_{P} を与えることと同義です．o_{P} には基底 $(e_1, \cdots, e_n)$ を入力します．多様体上に向きが与えられていることは, 各点で連続的に o_{P} を取っていることと同義です．このように多様体の向きは o で表せます[*2]．反対の向きは $-o$ で表すことができます．

■積分　m 次元多様体上の m 形式 ω の積分について考えます．ω が 0 でない領域がある正の座標系 (x^i) にすっぽり収まっているとします．このとき, ω の積分を以下のように定めます．

$$\int_M \omega := \int \omega_{1 \cdots m}(x^1, \cdots, x^m) \mathrm{d}x^1 \, \mathrm{d}x^2 \, \cdots \, \mathrm{d}x^m \tag{62}$$

[*2] 数学的には, o は $\bigwedge^n \mathrm{T}^* M / \mathbb{R}_>$ の元．ただし, $\mathbb{R}_> = \{x \in \mathbb{R} | x > 0\}$

(ここで積分領域は, $\omega_{1\cdots m}(x^1, \cdots, x^m) \neq 0$ の部分を含む適当な正方形を取っていると考えます.)

もし, ω が複数の座標にわたって 0 でないとすると, 適当に ω を分割し, 各パッチで積分して和を取ることで積分が定まります. このように定めた積分は座標の取り方によりません.

問題 7. 単位円周 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{E}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$ に対し, 角度 θ で座標が入っているとする. S^1 の向きを取った上で $\int_{S^1} \mathrm{d}\theta$ を計算してみよ.

■部分多様体 $\mathbb{E}^3$ 中の球面 S^2 のように, 多様体の中の多様体について考えます. このような多様体を部分多様体と言います. p 次元部分多様体 S は, 局所的に M の座標 $(x^1, \cdots, x^m)$ を使って, $(x^1, \cdots, x^p, 0, \cdots, 0)$ のように表すことができます. 包含写像を $\iota : S \hookrightarrow M$ と書くことにします.

■部分多様体上での積分 m 次元多様体 M において, $p < m$ として, $\omega \in \bigwedge^p \mathrm{T}^*M$ を考えます. M における p 次元部分多様体 S に対して, ω の積分が以下のように定義できます.

$$\int_S \omega := \int_S \iota^* \omega. \tag{63}$$

■境界付き多様体と Stokes の定理 図 5 のように, 局所的に $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}_{\geq}$ と同じ性質を持つ多様体 M を境界付き多様体と呼びます. ただし, $\mathbb{V}_{\geq} = [0, \infty)$. 境界を ∂V で表します. 境界が付いている多様体上の微分形式に対して, 以下の Stokes の定理が成立します.

定理 1. (Stokes の定理 [2]) n 次元多様体 M の $p-1$ 形式 α と, M における (コンパク

トで) 向き付けられた p 次元境界付き部分多様体 V に対し次が成立.

$$\int_V \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial V} \alpha. \tag{64}$$

ここで境界 ∂V の向き付けは以下のように与えられます. ∂V の座標 $(y_1, \cdots, y_{n-1})$ は, $(t, y_1, \cdots, y_{n-1})$ が V の正の座標を与える場合, ∂V の正の座標になります. ただし, t は ∂_t が V の外部を向くベクトル (縁から外側に向かうベクトル) です. これは象徴的に次のように表せます.

$$[\mathrm{d}t] \wedge o_{\partial V} = o_V \tag{65}$$

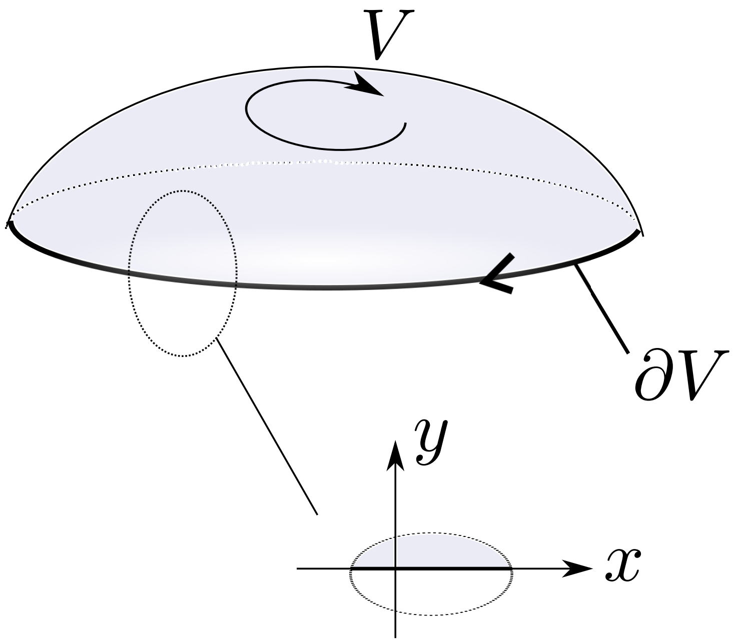

図 5　境界付き多様体

9　計量

多様体上の 2 階対称共変テンソル場 g で各点で非退化なものを**計量**と言います. ここで, 非退化とは, $g(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$ が任意の $\boldsymbol{u} \in \mathrm{T_P}M$ に対して成立する場合, $\boldsymbol{v} = 0$ とできることです. このような g は上手い基底 (正規直交基底) をとると必ず, $i = 1, \cdots, s$ に対しては $g_{ii} = -1$, $i = s+1, \cdots, m$ に対しては $g_{ii} = 1$, それ以外は $g_{ij} = 0$ とできます (Sylvester の慣性法則). ここで, $(s, (m-s))$ を符号数と言います. 通常の Euclid 空間で

は $s=0$ です．一般相対性理論で扱うのは $s=1$, $m-s=3$ のときです．$g(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v})$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の長さの二乗を表すと考えます．

■計量を用いた添字の上げ下げ　計量を用いることで，ベクトルとコベクトルの変換を行なうことができます．ベクトル v を，$v \lrcorner g$ に対応付ける変換を $\tilde{g}$ と書きます．$\tilde{g}$ は V から V^* への線形写像です．具体的に $\tilde{g}$ の作用を行列表示するために，基底 e_i を入力すると，

$$\tilde{g}(e_i) = g_{ij} e^j \tag{66}$$

となります．すなわち，g_{ij} が $\tilde{g}$ の行列表示になります．この結果，v の成分表示 v^i が $g_{ij}v^j$ に変換されることがわかると思います．

$\det g \neq 0$ なので，$\tilde{g}$ は全単射です．$\tilde{g}^{-1}$ の成分表示は g_{ij} の逆行列となります．これを，g^{ij} と書きます．すなわち，

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k \tag{67}$$

ということです．g^{ij} をかけることで，下付き添字を上付き添字に変換することができます．

10　ねじれ形式

多様体の向き o が与えられたとき，p 形式 ω_o が 1 つ定まっているとします．向きの反転に対して，

$$\omega_{-o} = -\omega_o \tag{68}$$

が成り立つとき，それらを束ねた ω を twisted p 形式と呼びます．

向き付けられていない n 次元多様体 Ω の twisted n form ω を考えます．twisted form の積分は次のように定義されます．

$$\int_\Omega \omega := \int_{\Omega_o} \omega_o \tag{69}$$

ここで Ω_o によって，o で向き付けられた Ω を表すとしました．右辺は通常の形式の積分になっています．ここで，Ω の向きを取り替えても，式 (69) の値は変わりません．よって，定義として well-defined です．

p 形式 α を積分するためには，n 次元多様体 M における p 次元部分多様体 S 上への引き戻しを定義する必要があります．$\iota : S \hookrightarrow M$ を包含写像とします．通常の微分形式とは異なり，twisted form は ι だけでは引き戻せません．このため，横断的向き付けが必要となります．

ベクトル空間 V に対し, W をその部分空間とします. V に同値関係 $\sim$ を以下のように入れます. $v,w \in W$ に対し, $v \sim w \Leftrightarrow v-w \in W$. $V/W := V/\sim$ と定めます. V/W の向きを, W の横断的向きと呼びます.

部分多様体 S が横断的に向き付けられているとは, 各点 x の接空間 $\mathrm{T}_x S$ が x に対して連続的に横断的に向き付けられているときのことを言います.

横断的向き付け o_T が与えられた S に対し, twisted form α 引き戻しは, 次のように定められます (o は S の内的な向き).

$$(\iota^*\alpha)_o = \iota^*(\alpha_{o_\mathrm{T}\wedge o}) \tag{70}$$

ここで, $\wedge$ は向きの結合を表します. たとえば, $o_1(\partial_x) > 0$, $o_2(\partial_y, \partial_z) > 0$ のとき, $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ に対して, 正になる向きを $o_1 \wedge o_2$ と表します. このように横断的向き付けが定まってはじめて, M 上の twisted p form を S 上の twisted p form に引き戻すことができます.

twisted p form に対して p 次元部分多様体 S 上への引き戻しは, 横断的向きを与えると定まり, その積分は S の内的な向きによりません. このことから, 横断的向きを持つ S に対して, twisted p form の積分が定まることがわかります. 結局,

- form の dual は内的に向きづけられた面 S
- twisted form の dual は横断的な面 S

ということです. このことから, 各種の form を表すには, Faraday-Schouten 図形を用いるべきです (図 6).

■ねじれ形式の Stokes の定理

定理 2. (ねじれ Stokes の定理 [2]) n 次元多様体 M のねじれ $p-1$ 形式 α と, 多様体 M の (コンパクトで) 横断的に向き付けられた境界付き部分多様体 V に対し次が成立.

$$\int_V \mathrm{d}\alpha = \int_{\partial V} \alpha. \tag{71}$$

この定理において境界 ∂V の向き付けは象徴的に次のように表せます[*3].

$$o_{\partial V,\mathrm{T}} = o_{V,\mathrm{T}} \wedge [\mathrm{d}t] \tag{72}$$

[*3] ここの部分の数学は未整備であるため整備するべき.

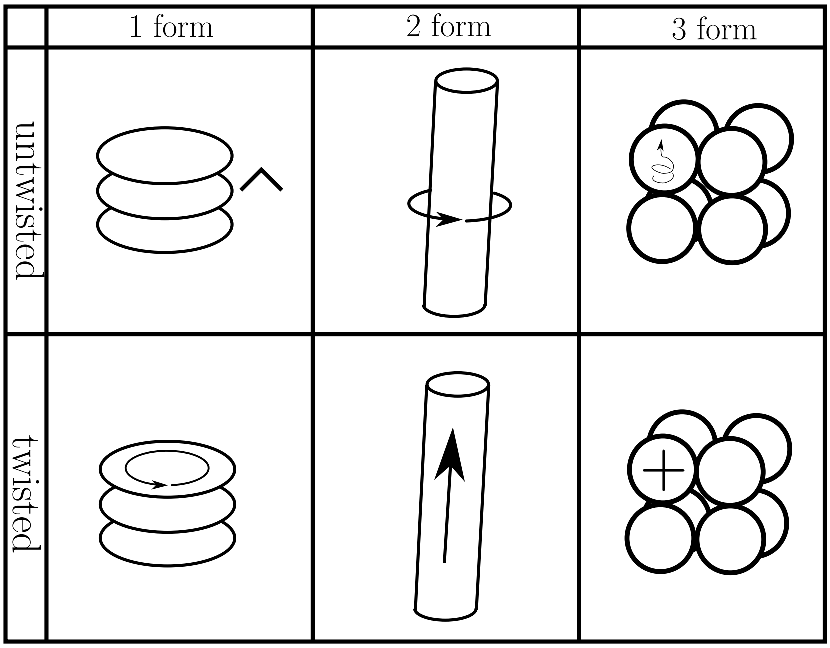

図 6　3 次元空間中の form の Faraday-Schouten 図

11　体積形式

計量付きの n 次元実ベクトル空間を考えます．ここで, ねじれ n 形式である体積形式を定義します．向き o が与えらえているとします．o と同じ向きを持つ正規直交基底 E_a とします.

$$\mathrm{vol}_o = E^1 \wedge \cdots \wedge E^n \tag{73}$$

を体積形式と言います.

$$E_a = e_i L^i{}_a \tag{74}$$

と変換するとすると,

$$g_{ab} = L^i{}_a L^j{}_b g_{ij}. \tag{75}$$

両辺の行列式を取ると,

$$\pm 1 = (\det[L^i{}_a])^2 \det[g_{ij}] \tag{76}$$

これより,

$$\det[L^i{}_a] = o(e_1, \cdots, e_n)\sqrt{|\det[g_{ij}]|}. \tag{77}$$

が成り立ちます.

ここで, e_i として, E_a と同じ向きの別の正規直交基底を取った場合を考えてみます. このとき, $\det[L^i{}_a] = 1$ となります. 式 (73) は $\mathrm{vol}_o = \det[L^i{}_a] e^1 \wedge \cdots \wedge e^n = e^1 \wedge \cdots \wedge e^n$ となります. 結局, 式 (73) は正規直交基底の取り方によらないことがわかりました.

次に, e_i が正規直交でない場合の表示を考えてみます. o を与えられた向きとしたとき, 体積形式は次のように与えられます.

$$\mathrm{vol}_o = o(e_1, \cdots, e_n)\sqrt{|\det g_{ij}|}\, e^1 \wedge \cdots e^n. \tag{78}$$

12 Hodge の $*$ 演算子

計量付き m 次元ベクトル空間 V 上の Hodge の $*$ 作用素の基底に対する作用を以下のように定義します.

$$\{*(e^{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge e^{\alpha_p})\}_o = \frac{1}{(n-p)!}(\mathrm{vol}_o)^{\alpha_1 \cdots \alpha_p}{}_{\beta_1 \cdots \beta_{m-p}}(e^{\beta_1} \wedge \cdots \wedge e^{\beta_{m-p}}). \tag{79}$$

ここで, vol のはじめの p 個の添字は計量を使って上に上げています.

$$*1 = \mathrm{vol} \tag{80}$$

が成立します. $*$ を作用させることで, ねじれなしの形式はねじれ, ねじれ形式はねじれがなくなります.

この定義より, p 形式 ω に対して

$$**\omega = (-1)^{p(m-p)+s}\omega \tag{81}$$

が成立します. s は計量の中でマイナス成分の数.

表 1　$**$ の符号 ($m = 3$, $s = 0$ のとき)

p	0	1	2	3
$(-1)^{p(m-p)+s}$	1	1	1	1

p 形式 ω, 1 形式 φ に対して,

$$*(\omega \wedge \varphi) = \tilde{g}^{-1}(\phi) \lrcorner * \omega. \tag{82}$$

が成立します.

表 2　$**$ の符号 ($m=4$, $s=1$ のとき)

p	0	1	2	3	4
$(-1)^{p(m-p)+s}$	-1	1	-1	1	-1

p 形式 ω, η に対して,

$$\omega \wedge *\eta = \frac{1}{p!}\omega_{\alpha_1\cdots\alpha_p}\eta^{\alpha_1\cdots\alpha_p}\,\mathrm{vol} \tag{83}$$

が成立します. さらに, 対称性

$$\omega \wedge *\eta = \eta \wedge *\omega \tag{84}$$

も成立します. このため, p 形式間の内積 $(\omega, \eta)_\Omega$ を以下のように定めることができます.

$$(\omega, \eta)_\Omega = \int_\Omega \omega \wedge *\eta. \tag{85}$$

問題 8. 4 次元空間で座標 (t, x, y, z) に対して計量が $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ と書かれているとする. このとき, $\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ などの 4 次元 Hodge をいくつか計算してみよ.

13　電磁気への応用

■3 次元電磁気学　3 次元空間を考えます. ある外向きに向き付けられた 3 次元領域 V とし, 電荷密度を表すねじれ 3 形式 ρ を積分すると, ねじれ 2 形式である電束密度 $\mathcal{D}$ の境界での積分と等しくなります.

$$\int_{\partial V} \mathcal{D} = \int_V \rho. \tag{86}$$

これより,

$$\mathrm{d}\mathcal{D} = \rho \tag{87}$$

が成立します.

ねじれ 2 形式である電流密度 j の外向きに向き付けられた面 S 上での積分は $\mathcal{D}$ および, ねじれ 1 形式 $\mathcal{H}$ を用いて,

$$\int_{\partial S} \mathcal{H} = \int_S j + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathcal{D} \tag{88}$$

となります. これより,

$$\mathrm{d}\mathcal{H} = j + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}. \tag{89}$$

2 形式 B の時間変化は電場を表す 1 形式 E を作る. これは, 内的に向き付けられた面 S に対して,

$$\int_{\partial S} E = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S B \tag{90}$$

を意味します. これより,

$$\mathrm{d}E = -\frac{\partial B}{\partial t}. \tag{91}$$

B は湧き出しがないことより, 内的に向き付けられた面 S に対して,

$$\int_S B = 0. \tag{92}$$

よって,

$$\mathrm{d}B = 0. \tag{93}$$

E, $\mathcal{D}$ の関係は真空中では

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 * E \tag{94}$$

となります. $\mathcal{H}$, B の関係は真空中では

$$B = \mu_0 * \mathcal{H} \tag{95}$$

となります.

以上が Maxwell 方程式の微分形式を用いた定式化です. 計量に関係する項は構成方程式のみになっていることが特徴です.

■4 次元化　4 次元空間での 2 形式を

$$F = E \wedge \mathrm{d}t + B \tag{96}$$

と置いてみます．この量を 4 次元で外微分してみます．(3 次元の外微分を $\mathrm{d}^{(3)}$ と書きます．)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}F &= \mathrm{d}^{(3)} E \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}^{(3)} B + \mathrm{d}t \wedge \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \left(\mathrm{d}^{(3)} E - \frac{\partial B}{\partial t} \right) \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}^{(3)} B \\ &= 0. \end{aligned} \tag{97}$$

最後に式 (91), (93) を使いました．よって，$\mathrm{d}F = 0$ は式 (91), (93) の 2 つの Maxwell 方程式を 1 つにまとめたものと解釈できます．

同様に 4 次元空間でのねじれ 2 形式を次のように導入します．

$$H = -\mathcal{H} \wedge \mathrm{d}t + \mathcal{D}, \tag{98}$$

さらに，ソースを表す 4 次元空間でのねじれ 3 形式

$$J = -j \wedge \mathrm{d}t + \rho \tag{99}$$

を導入します．

$$\begin{aligned} \mathrm{d}H &= -\mathrm{d}^{(3)} \mathcal{H} \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}^{(3)} \mathcal{D} + \mathrm{d}t \wedge \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \\ &= \left(-\mathrm{d}^{(3)} \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \right) \wedge \mathrm{d}t + \mathrm{d}^{(3)} \mathcal{D} \\ &= -j \wedge \mathrm{d}t + \rho \\ &= J \end{aligned} \tag{100}$$

とできます．このように，式 (87),(89) は 1 つの式にまとまります．

構成方程式は，

$$H = Y_0 * F \tag{101}$$

のようにまとまります．4 次元電磁気学では，式 (96), (98), (99) の定義が慣性系の取り方によらずに成立することを大きな仮定とします．すなわち，F, H, J は 4 次元の幾何学的対象となります．

問題 9. (t, x, y, z) の座標を具体的に取って, 式 (101) を導出してみよ．ただし, この座標系では $g_{ij} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$ であることを用いる．

14　さらに学びたい人のために

微分形式の取り扱いをてっとり早く学ぶには [1] の数学セクションがお勧めです．一見すると長そうに見えるのですが, 難しめの内容には $\otimes$ マークが付けられており, その部分を飛ばすと, すぐに読めると思います．この本は物理的にも, 構成方程式から重力情報を抽出しようという野心的な課題を掲げた本で, Maxwell 理論に新しい見方を投げかけています．物理への応用を主眼に置いた [2] も, 細かい部分まで丁寧に書かれた良い教科書ですが, 読みこなすには時間がかかります．

[3] は数学科の学部生 3 回生程度の人向けの参考書です．非常に丁寧に書かれており, 物理系の人でも読みこなせると思います．逆に数学が得意な人には冗長と感じる場合が多いようです．そういう人には "松島与三「多様体入門」, 裳華房 (1965)" が定評のある教科書です．しかし, 私には難しすぎましたので, 未読です．数学の本では, 位相空間の話や, 関数の微分可能性などに関する議論が長々と続くので, ユーザーとして使う分には内容すべてを理解しておく必要はありません．

特殊相対性理論への応用に関しては, [4] があります．出版されている特殊相対論の教科書のほとんどが, 正規直交座標を取って成分主体で記述される中,「特殊相対論の基底無依存, 座標系無依存な定式化 (=一般相対性原理に基づく特殊相対論の定式化) を通じてこの理論の本質を明示すること」を主題に掲げたこの教科書は独特の存在感を示しています．物理学の幾何学的定式化の哲学を学ぶには非常に良い本です．

標準的な記法と微分形式記法の間の子を利用して書かれた電磁気学の教科書には [5] があります．

付録 A　外積の係数の取り方

$$\alpha \wedge \beta = a_{k,l} A_{k+l}(\alpha \otimes \beta). \tag{102}$$

として, 係数 $a_{k,l}$ を定めてみる. 式 (29) を要請すると,

$$a_{k,l+m} a_{l,m} = a_{k+l,m} a_{k,l} \tag{103}$$

さらに,

$$e^1 \wedge \cdots \wedge e^k = k! A_k(e^1 \otimes \cdots \otimes e^k) \tag{104}$$

を要請すると[*4],

$$a_{k-1,1}\, a_{k-2,1} \cdots a_{2,1}\, a_{1,1} = k!\,. \tag{105}$$

これより,

$$a_{k,1} = (k+1)!\,. \tag{106}$$

式 (103) において, $m = 1$ とすることで,

$$a_{k,l+1} = \frac{k+l+1}{l+1} a_{k,l}. \tag{107}$$

よって,

$$a_{k,l} = \frac{(k+l)!}{k!\, l!} \tag{108}$$

を得る.

[*4] $e^1 \wedge \cdots \wedge e^k = A_k(e^1 \otimes \cdots \otimes e^k)$ とする流儀もある. これは, 単体複体の体積要素を考えていることに対応する.

参考文献

[1] F. W. Hehl and Y. N. Obukhov, “Foundations of Classical Electrodynamics: Charge, Flux, and Metric”, Birkhäuser (2003).

[2] “The Geometry of Physics: An Introduction”, 2nd. ed., Theodore Frankel, Cambridge (2004).

[3] 多様体の基礎, 松本幸夫, 東京大学出版会 (1988).

[4]「特殊相対性理論の数学的基礎」, 河合俊治, 裳華房 (2005).

[5]「新版 マクスウェル方程式: 電磁気学のよりよい理解のために」, 北野正雄, サイエンス社 (2009).